

Examen de Análisis de Variable Compleja
Cuarto curso de Matemáticas (Fundamental)
4 de septiembre de 2000

1. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0; \varepsilon, R)$ ($0 < \varepsilon < R$), calcúlese la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^2} dx$$

donde α es un parámetro real y $-1 < \alpha < 3$ y $\alpha \neq 1$.

2. Determinar el número de ceros del polinomio $P(z) = z^9 - 7z^6 + z^5 - 2z^3 - 3$.
- a) En el anillo $A(0; 1, 2)$;
- b) En el semiplano de la derecha.

3. Sea f una función holomorfa en el semiplano superior $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ y tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in \Omega$ y $f(i) = 0$. ¿Cual es el mayor valor que puede tener $|f(2i)|$?

4. Sean z_1, z_2, z_3 números complejos distintos y F un conexo cerrado que los contiene. Estúdiese si la función

$$f(z) = \frac{z}{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)}$$

tiene primitiva en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus F$.

5. Sea u una función armónica en todo el plano y supongamos que existen números reales positivos, a, b , tales que $u(z) \leq a|\log |z|| + b$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. ¿Qué puede afirmarse de u ?

Para aprobar hay que hacer **bien** tres ejercicios. El ejercicio 1 es obligatorio.

Sigue al dorso.

Sugerencias:

Ejercicio 1. No es una sugerencia sino un consejo: justifique en pocas líneas la aplicación del teorema de los residuos (qué función integra, en qué abierto trabaja, singularidades, etc.) y haga los cálculos con claridad y sin equivocarse.

Ejercicio 2. Típica aplicación del teorema de Rouché y del principio del argumento. ¡No se equivoque al calcular las potencias de $-i$!

Ejercicio 3. Lema de Schwarz.

Ejercicio 4. Caracterización de la existencia de primitivas y teorema general de Cauchy.

Ejercicio 5. Relación entre funciones armónicas y holomorfas.

Teoría

Responder a una sola de las siguientes preguntas:

A) Comportamiento local de una función holomorfa.

B) Desarrollo en serie de Laurent de una función holomorfa en un anillo.